

PEMODELAN NUMERIK ALIRAN TAK JENUH UNTUK EVALUASI INFLOW DAN STABILITAS LERENG TAMBANG TROPIS DI KALIMANTAN SELATAN

Numerical Modeling of Unsaturated Flow for Assessing Inflow and Slope Stability in Tropical Mines of South Kalimantan

Jarwanto¹, Arie Noor Rakhman²

^{1,2}Universitas AKPRIND Indonesia

Penulis Korespondensi: jarwanbjb@gmail.com

Abstract

Open-pit mining operations in South Kalimantan, Indonesia, face complex geohydrological challenges due to extreme tropical rainfall and heterogeneous overburden stratigraphy. This study aims to evaluate the role of unsaturated flow (vadose zone) in predicting mine inflow and slope stability, and to assess the limitations of conventional approaches that consider saturated flow conditions only. One-dimensional (1-D) and two-dimensional (2-D) numerical models were developed using the Finite Element Method (FEM) based on the Richards equation to quantify infiltration dynamics and wetting front propagation under episodic rainfall, compare unsaturated model outputs with conventional saturated models, and analyze the sensitivity of Soil Water Retention Curve (SWRC) parameters and unsaturated hydraulic conductivity functions $K(\theta)$. The governing equations were solved using a Newton–Raphson iterative scheme to handle the strong nonlinearity of hydraulic functions. The results demonstrate that unsaturated flow models represent transient hydrological responses more accurately than saturated models, which tend to underestimate early-stage inflow. Under extreme rainfall scenarios analogous to the January 2021 regional flooding event, the wetting front reached critical depths within 2–5 days, accompanied by a rapid increase in pore water pressure that may compromise slope stability. Sensitivity analysis indicates that the van Genuchten parameters (α and n) and saturated hydraulic conductivity (K_s) dominate model output uncertainty, particularly within intermediate moisture ranges typical of lateritic and alluvial materials. These findings highlight the necessity of integrating coupled unsaturated–saturated flow modeling with field-based measurements to support effective dewatering design and slope risk mitigation in high-rainfall open-pit mining environments.

Keywords: infiltration; vadose; inflow; slope; tropical.

Abstrak

Kegiatan pertambangan terbuka di Kalimantan Selatan menghadapi tantangan geohidrologi yang kompleks akibat curah hujan tropis ekstrem dan heterogenitas stratigrafi tanah penutup. Penelitian ini bertujuan untuk mengevaluasi peran aliran tak jenuh (zona vadose) dalam memprediksi inflow tambang dan kestabilan lereng, serta mengkaji keterbatasan pendekatan konvensional yang hanya mempertimbangkan kondisi aliran jenuh. Pemodelan numerik satu dimensi (1-D) dan dua dimensi (2-D) dikembangkan menggunakan metode elemen hingga (Finite Element Method, FEM) berbasis Persamaan Richards untuk mengkuantifikasi dinamika infiltrasi dan pergerakan *front basah* akibat curah hujan episodik, membandingkan keluaran model tak jenuh dengan model jenuh, serta menganalisis sensitivitas parameter Soil Water Retention Curve (SWRC) dan fungsi konduktivitas hidraulik tak jenuh $K(\theta)$. Penyelesaian numerik dilakukan dengan skema

iteratif Newton–Raphson guna menangani nonlinieritas tinggi pada fungsi hidraulik. Hasil pemodelan menunjukkan bahwa pendekatan aliran tak jenuh mampu merepresentasikan respons hidrologi transien secara lebih akurat dibandingkan model jenuh, yang cenderung meremehkan inflow pada fase awal hujan. Pada skenario hujan ekstrem yang dianalogikan dengan kejadian banjir regional Januari 2021, *front basah* teridentifikasi mencapai kedalaman kritis dalam waktu 2–5 hari dan memicu peningkatan cepat tekanan air pori yang berpotensi menurunkan kestabilan lereng. Analisis sensitivitas menunjukkan bahwa parameter van Genuchten (α dan n) serta konduktivitas hidraulik jenuh (K_s) merupakan pengendali utama ketidakpastian keluaran model, sehingga integrasi pemodelan aliran jenuh–tak jenuh dengan pengukuran lapangan direkomendasikan untuk perencanaan dewatering dan mitigasi risiko lereng tambang terbuka di lingkungan curah hujan tinggi.

Kata kunci: infiltrasi; vadose; inflow; lereng; tropis

PENDAHULUAN

Kalimantan Selatan merupakan wilayah beriklim tropis basah yang dicirikan oleh curah hujan tahunan tinggi, berkisar antara 1.800–2.800 mm, dengan pola musiman yang disertai kejadian hujan ekstrem berintensitas tinggi (Sukmara, Wahab, & Ariyaningsih, 2022). Dalam beberapa dekade terakhir, data klimatologi regional dan laporan kejadian banjir menunjukkan peningkatan frekuensi hujan ekstrem yang signifikan, yang berdampak langsung pada sistem hidrologi permukaan dan bawah permukaan di area pertambangan terbuka (Fitriati, Rusmayadi, Hatta, & Anggraini, 2025). Kondisi ini menempatkan pengelolaan air tambang sebagai salah satu tantangan utama dalam perencanaan dan operasi tambang terbuka di Kalimantan Selatan, terutama terkait peningkatan inflow ke pit dan risiko ketidakstabilan lereng tambang.

Pada tambang terbuka di lingkungan tropis, curah hujan intensif mempercepat proses infiltrasi air melalui timbunan overburden, lereng pit, serta lantai tambang. Air hujan yang terinfiltrasi tidak serta-merta masuk ke zona jenuh, melainkan terlebih dahulu bergerak dan tersimpan sementara di zona tak jenuh (*vadose zone*) (Y. Wang, Li, Hou, Zhang, & Li, 2022). Zona ini berperan penting dalam mengontrol kecepatan penetrasi air hujan, redistribusi kelembaban tanah, pembentukan tekanan air pori transien, serta respon mekanik massa tanah dan batuan terhadap pembasahan (Cho, 2016). Oleh karena itu, dinamika aliran pada zona tak jenuh memiliki implikasi langsung terhadap kestabilan lereng dan besaran inflow awal ke pit, khususnya pada fase awal dan selama kejadian hujan ekstrem (Zhang, Li, Wu, & Li, 2022).

Namun demikian, sebagian besar studi hidrologi dan hidrogeologi tambang masih berfokus pada pemodelan aliran pada kondisi jenuh (*groundwater flow*), dengan asumsi bahwa kontribusi utama inflow berasal dari akuifer jenuh regional. Pendekatan ini relatif memadai untuk evaluasi inflow jangka menengah hingga panjang, tetapi cenderung mengabaikan proses transien di zona tak jenuh yang justru mendominasi respon hidrologi pada skala waktu jam hingga hari setelah hujan lebat (Szczepliński, 2019; Vianney, Hoth, Moro, Wardani, & Drebenstedt, 2025). Akibatnya, inflow awal ke pit dan peningkatan tekanan pori transien sering kali diremehkan, sehingga desain sistem drainase, dewatering, dan mitigasi lereng berpotensi menjadi tidak konservatif, khususnya di lingkungan tropis dengan intensitas hujan tinggi seperti Kalimantan Selatan.

Secara konseptual, aliran air pada media berpori dengan kondisi jenuh–tak jenuh bervariasi secara spasial dan temporal dapat direpresentasikan secara fisik melalui Persamaan Richards, yang menggabungkan hukum Darcy dengan konservasi massa untuk kondisi aliran *variably saturated* (Farthing & Ogden, 2017). Implementasi numerik Persamaan Richards, umumnya menggunakan metode elemen hingga (Finite Element Method, FEM), telah banyak diterapkan dalam studi infiltrasi, stabilitas lereng, dan hidrologi tanah, dengan perangkat lunak seperti HYDRUS dan SEEP/W sebagai contoh aplikasi yang mapan (Chen, Zheng, Huang, & Liu, 2024; Usman, Chua, Irvine, & Teang, 2025; Zha et al., 2019). Meskipun demikian, aplikasi pemodelan aliran tak jenuh secara eksplisit pada konteks tambang terbuka tropis di Indonesia, khususnya yang mempertimbangkan karakteristik tanah laterit, aluvial, dan batuan lapuk khas Kalimantan Selatan, masih relatif terbatas.

Berdasarkan uraian tersebut, permasalahan utama penelitian ini adalah keterbatasan pendekatan pemodelan berbasis aliran jenuh dalam merepresentasikan respon hidrologi transien pada tambang terbuka di lingkungan tropis bercurah hujan tinggi. Alternatif solusi yang tersedia mencakup penggunaan model empiris, pendekatan semi-konseptual, atau pemodelan numerik terintegrasi (Gong, Cook, Therrien, Wang, & Brunner, 2023). Namun, pendekatan empiris umumnya tidak mampu menangkap dinamika fisik *wetting front* (*front basah*) dan tekanan pori transien, sedangkan model jenuh konvensional tidak dirancang untuk merepresentasikan proses infiltrasi pada zona *vadose* (Bronstert, Niehoff, & Schiffler, 2023; Kmec, Fürst, Vodák, & Šír, 2021).

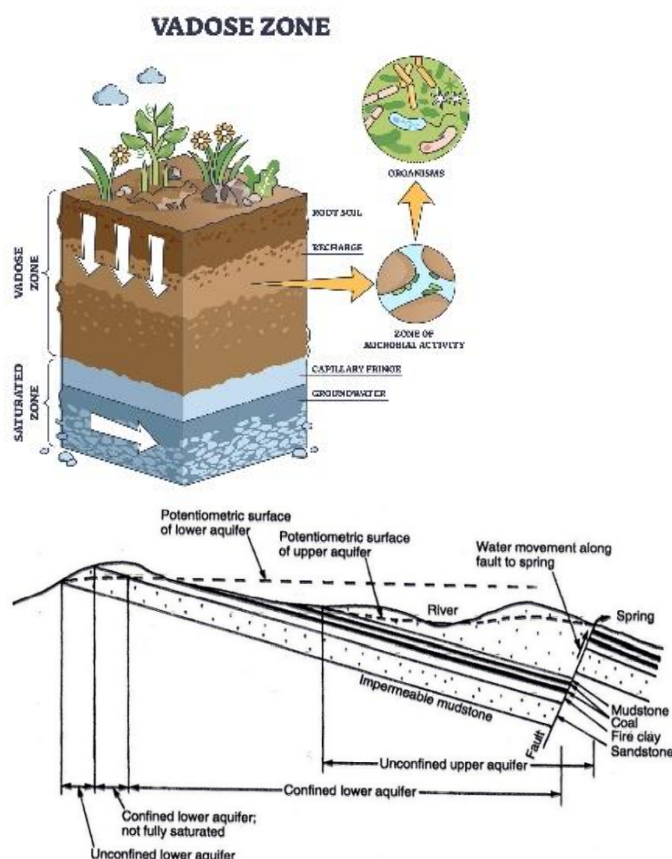
Oleh karena itu, solusi yang dipilih dalam penelitian ini adalah penerapan pemodelan numerik aliran tak jenuh berbasis Persamaan Richards menggunakan metode elemen hingga, baik dalam domain satu dimensi (1-D) maupun dua dimensi (2-D). Pendekatan ini memungkinkan kuantifikasi dinamika infiltrasi dan pergerakan *front basah* akibat hujan episodik, evaluasi perbedaan respon inflow antara model tak jenuh dan jenuh, serta analisis sensitivitas parameter Soil Water Retention Curve (SWRC) dan konduktivitas hidraulik tak jenuh yang relevan dengan kondisi tanah tropis (Clément, Sous, Bouchette, Golay, & Ersoy, 2023; Younes et al., 2022). Dengan demikian, penelitian ini diharapkan dapat memberikan dasar ilmiah yang lebih kuat untuk perencanaan sistem *dewatering* dan mitigasi risiko kestabilan lereng pada tambang terbuka di Kalimantan Selatan, serta berkontribusi pada pengembangan praktik pengelolaan air tambang yang lebih adaptif terhadap perubahan iklim dan intensifikasi kejadian hujan ekstrem.

METODE

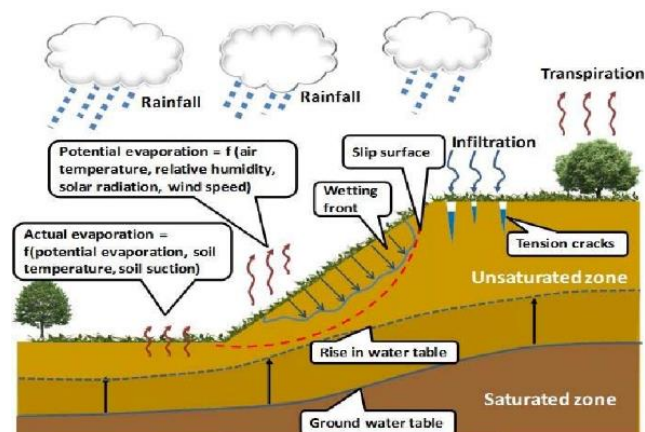
Penelitian ini menerapkan pendekatan pemodelan numerik aliran air tak jenuh–jenuh bersifat transien untuk mengevaluasi respon hidrologi tambang terbuka terhadap curah hujan episodik di Kalimantan Selatan. Metodologi disusun untuk merepresentasikan proses fisik infiltrasi dan pergerakan *front basah* pada media berpori berlapis, membandingkan kinerja model aliran tak jenuh berbasis Persamaan Richards dengan pendekatan aliran jenuh konvensional, serta mengevaluasi sensitivitas keluaran model terhadap parameter hidraulik utama (Farthing & Ogden, 2017; Zhang et al., 2022). Pemodelan dilakukan pada dua skala,

yaitu kolom satu dimensi (1-D) untuk analisis infiltrasi vertikal lokal dan domain dua dimensi (2-D) berupa penampang melintang yang merepresentasikan geometri tipikal tambang terbuka tropis (Romano, Brunone, & Santini, 1998).

Domain model dua dimensi dikonseptualisasikan sebagai penampang melintang tambang terbuka dengan lebar horizontal antara 200–500 m dan kedalaman hingga 100 m. Stratigrafi disederhanakan menjadi sistem berlapis yang mencerminkan kondisi umum wilayah Kalimantan Selatan, terdiri atas lapisan topsoil–overburden yang didominasi kondisi tak jenuh, lapisan pasir atau aluvial dengan permeabilitas relatif tinggi, lapisan laterit atau batuan lapuk dengan sifat hidraulik menengah hingga rendah, serta batuan dasar yang diasumsikan berada pada kondisi jenuh relatif stabil. Model satu dimensi berupa kolom vertikal digunakan untuk mengevaluasi respon infiltrasi lokal dan memperjelas mekanisme pergerakan *front basah* secara vertikal tanpa pengaruh lateral (Jia et al., 2024; Xing, Wang, & Ma, 2018). Konseptualisasi ini dipilih berdasarkan kesesuaian dengan karakteristik material tanah dan batuan yang umum dijumpai pada tambang terbuka di Kalimantan Selatan menurut studi regional dan literatur tambang tropis (Rahardjo, Santoso, Leong, Ng, & Hua, 2011; Rahmad, Raharjo, & Ediyanto, 2019). Domain model fisik dapat dilihat pada Gambar 1 dan 2 berikut.



Gambar 1. Model Stratigrafi pada Zona Tak Jenuh (Vektor, 2026) dan Kondisi Air Tanah pada Lereng Tambang Batubara (Rahmad et al., 2019)



Gambar 2. Visualisasi Vertikal Sistem Hidrogeologi dan Infiltrasi Air Tambang (Rahardjo et al., 2011)

Aliran air pada media berpori tak jenuh–jenuh dimodelkan menggunakan Persamaan Richards, yang merupakan hasil penggabungan hukum Darcy tak jenuh dan persamaan konservasi massa. Dalam penelitian ini, tekanan kapiler digunakan sebagai variabel utama untuk memudahkan penerapan kondisi batas berbasis tinggi hidrolik. Formulasi ini memungkinkan representasi kontinu dari kondisi tak jenuh hingga jenuh serta mampu menangkap dinamika transien akibat masukan curah hujan. Keberadaan istilah sumber dan sink dalam persamaan memungkinkan simulasi pengaruh sistem dewatering atau drainase tambang terhadap distribusi tekanan air pori dan pola aliran bawah permukaan. Dalam penelitian ini, tekanan kapiler (ψ) digunakan sebagai variabel utama, sehingga persamaan dasar dituliskan sebagai:

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi)(\nabla \psi + \mathbf{e}_z)] + S(\mathbf{x}, t)$$

di mana θ adalah kadar air volumetrik, $K(\psi)$ konduktivitas hidrolik tak jenuh, $\mathbf{e}_z$ vektor gravitasi, dan S merupakan sumber atau sink yang merepresentasikan dewatering atau drainase. Formulasi ini memungkinkan pemodelan kontinu dari kondisi tak jenuh menuju jenuh dan secara eksplisit menangkap dinamika transien akibat input hujan.

Hubungan antara tekanan kapiler dan kadar air volumetrik dimodelkan menggunakan fungsi Soil Water Retention Curve (SWRC) van Genuchten, sedangkan konduktivitas hidrolik tak jenuh diturunkan menggunakan relasi Mualem–van Genuchten. Parameter utama yang digunakan meliputi kadar air residual (θ_r), kadar air jenuh (θ_s), parameter bentuk α dan n , serta konduktivitas hidrolik jenuh (K_s). Rentang nilai parameter diadopsi dari literatur yang relevan untuk material laterit, aluvial, dan batuan lapuk di lingkungan tropis (Giudici, 2023; Jia et al., 2024; Xing et al., 2018). Pendekatan ini memungkinkan evaluasi sensitivitas respon model terhadap variasi parameter yang realistis secara geoteknik dan hidrogeologi. Rumus fungsi van Genuchten (1980) untuk SWRC dan relasi Mualem/van Genuchten untuk $K(\theta)$:

$$\theta(\psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + (\alpha |\psi|^n)^m)^{1/m}}, m = 1 - \frac{1}{n}$$

Dengan *effective saturation* terdefinisi:

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$$

Kemudian konduktivitas tak jenuh menurut Mualem–van Genuchten:

$$K(\theta) = K_s S_e^l \left[1 - (1 - S_e^{1/m})^m \right]^2$$

θ_r , θ_s , α , n , l (umumnya $l \approx 0.5$).

Parameter dan fungsi hidraulik ini memiliki sensitivitas tinggi pada rentang kelembaban menengah, yang merepresentasikan zona transisi utama dalam simulasi pergerakan *front basah*. Formulasi dan nilai parameter diadopsi berdasarkan landasan teoretis van Genuchten serta panduan implementasi numerik pada perangkat lunak HYDRUS (Usman et al., 2025; X. Wang, Huang, Qin, & Dai, 2025)

Kondisi batas pada permukaan atas domain dimodelkan sebagai fluks curah hujan transien $P(t)$ yang merepresentasikan input hujan episodik, dengan kemungkinan reduksi oleh evapotranspirasi $E(t)$. Batas lateral domain ditetapkan sebagai kondisi impermeabel atau kondisi tinggi hidraulik tetap, tergantung pada skenario hidrogeologi yang diuji. Pada bagian bawah domain, kondisi batas Dirichlet diterapkan untuk merepresentasikan muka air tanah regional yang relatif stabil (Sales et al., 2025). Kondisi awal tekanan kapiler dan distribusi kadar air ditentukan berdasarkan asumsi kondisi pra-hujan atau musim kering yang disederhanakan, sehingga respon transien akibat hujan dapat diamati secara jelas dan terisolasi dari pengaruh kondisi awal yang kompleks (Ahmed, Bryson, & Crawford, 2021).

Persamaan Richards didiskretisasi secara spasial menggunakan metode elemen hingga dengan pendekatan Galerkin, yang sesuai untuk menangani geometri kompleks dan heterogenitas berlapis. Integrasi waktu dilakukan menggunakan skema implisit *backward Euler* untuk menjamin kestabilan numerik pada simulasi transien. Nonlinieritas yang muncul akibat ketergantungan kadar air (θ) dan konduktivitas hidraulik (K) terhadap tekanan kapiler (ψ) diselesaikan menggunakan metode iteratif Newton–Raphson pada setiap langkah waktu. Kriteria konvergensi ditetapkan berdasarkan norma residual dan perubahan maksimum tekanan kapiler antar iterasi, dengan penerapan langkah waktu adaptif pada periode pergerakan *front basah* yang cepat (Hassane Maina & Ackerer, 2017; Stokke, Mitra, Storvik, Both, & Radu, 2023).

Simulasi dilakukan untuk dua skenario curah hujan utama, yaitu skenario hujan normal yang merepresentasikan kondisi rata-rata musiman dan skenario hujan ekstrem yang dianalogikan dengan kejadian banjir regional di Kalimantan Selatan. Untuk mengevaluasi keunggulan pendekatan aliran tak jenuh, hasil pemodelan dibandingkan dengan keluaran model jenuh konvensional yang hanya mempertimbangkan aliran air tanah. Parameter evaluasi meliputi waktu kedatangan *front basah*, distribusi tekanan air pori, serta besaran inflow ke pit tambang, baik pada skala lokal maupun penampang melintang (Kmec et al., 2021).

Analisis sensitivitas dilakukan dengan memvariasikan parameter van Genuchten (α dan n) serta konduktivitas hidraulik jenuh dalam rentang nilai yang dilaporkan pada literatur. Pengaruh variasi parameter terhadap waktu respon hidrologi, puncak inflow, dan distribusi tekanan air pori dianalisis secara kuantitatif

untuk mengidentifikasi parameter yang paling dominan mengendalikan ketidakpastian keluaran model. Hasil analisis sensitivitas ini digunakan sebagai dasar untuk merumuskan kebutuhan data lapangan yang paling kritis bagi penerapan model secara operasional pada perencanaan dewatering dan mitigasi kestabilan lereng tambang terbuka (Sales et al., 2025; Wise, Clement, & Molz, 1994).

Penelitian ini disusun dengan sejumlah batasan metodologis yang perlu dipertimbangkan dalam interpretasi hasil pemodelan. Pertama, pemodelan difokuskan pada domain dua dimensi (2-D) berupa penampang melintang tambang terbuka. Pendekatan ini dipilih untuk menangkap mekanisme utama infiltrasi dan pergerakan *front basah* secara vertikal dan lateral, namun tidak sepenuhnya merepresentasikan heterogenitas lateral yang kompleks maupun efek tiga dimensi, seperti pengaruh pertemuan patahan, zona rekahan dominan, atau geometri pit yang tidak simetris. Oleh karena itu, untuk analisis berskala luas atau lokasi dengan kompleksitas struktur geologi tinggi, penggunaan model tiga dimensi berbasis FEFLOW atau MODFLOW yang terkopel dengan modul aliran tak jenuh direkomendasikan.

Kedua, setiap lapisan stratigrafi dalam model diasumsikan memiliki sifat hidraulik homogen yang direpresentasikan oleh nilai rata-rata parameter kadar air residual dan jenuh, parameter van Genuchten, serta konduktivitas hidraulik jenuh. Asumsi ini menyederhanakan kondisi aktual di lapangan, di mana heterogenitas litologi, variasi tingkat pelapukan, serta keberadaan retakan dan struktur diskontinu dapat menyebabkan variasi sifat hidraulik yang signifikan (Sales et al., 2025; Usman et al., 2025). Konsekuensinya, ketidakpastian model dapat meningkat apabila parameter tidak dikalibrasi dengan data lapangan. Oleh sebab itu, pengambilan sampel inti, uji permeabilitas, dan pengukuran SWRC menggunakan pressure-plate pada beberapa titik representatif sangat dianjurkan untuk aplikasi operasional.

Ketiga, penelitian ini dibatasi pada pemodelan hidrodinamika aliran air, tanpa mempertimbangkan proses reaktif kimia. Mekanisme pembentukan air asam tambang (acid mine drainage), sorpsi dan reaksi kimia, serta transport zat terlarut tidak dimasukkan dalam formulasi model. Meskipun proses-proses tersebut relevan terhadap kualitas air tambang, pengabaian aspek kimia dilakukan untuk memfokuskan analisis pada dinamika aliran dan tekanan air pori sebagai faktor pengendali inflow dan kestabilan lereng.

Keempat, data meteorologi berupa curah hujan dan evapotranspirasi diasumsikan tersedia dengan resolusi temporal harian hingga jam-an dan dianggap representatif untuk domain model. Dalam praktiknya, keterbatasan ketersediaan data meteorologi berkualitas tinggi, khususnya dari stasiun lokal di sekitar area tambang, dapat mempengaruhi akurasi simulasi. Untuk wilayah Kalimantan Selatan, penggunaan data resmi dari BMKG dan Stasiun Klimatologi (Staklim) direkomendasikan sebagai dasar penyusunan skenario hujan desain.

Kelima, pendekatan media berpori homogen yang digunakan dalam penelitian ini tidak secara eksplisit merepresentasikan aliran pada batuan yang didominasi rekahan, karst, atau anisotropi berlapis kuat. Pada kondisi geologi tersebut, pendekatan porous medium ekuivalen dapat menjadi tidak memadai,

sehingga diperlukan model dual-continuum atau discrete fracture network untuk menangkap mekanisme aliran yang lebih realistis.

Keenam, kondisi batas dan kondisi awal, khususnya tinggi muka air tanah regional pada batas bawah domain, diasumsikan relatif stabil atau bervariasi dalam rentang tertentu. Kenyataannya, muka air tanah dapat berfluktuasi secara musiman atau dipengaruhi oleh aktivitas dewatering di sekitar lokasi. Oleh karena itu, hasil pemodelan perlu diinterpretasikan bersama dengan analisis sensitivitas terhadap variasi kondisi awal dan kondisi batas guna mengakomodasi ketidakpastian hidrogeologi regional.

Seluruh hasil kuantitatif yang disajikan dalam penelitian ini diperoleh dari simulasi parametris berbasis studi numerik dengan menggunakan rentang parameter yang diadopsi dari literatur dan data regional yang tersedia secara publik. Oleh karena itu, untuk penerapan operasional di tingkat lokasi tambang, hasil pemodelan ini perlu dikalibrasi lebih lanjut menggunakan data lapangan lokal agar representasi kondisi hidrogeologi menjadi lebih akurat dan andal.

HASIL DAN PEMBAHASAN

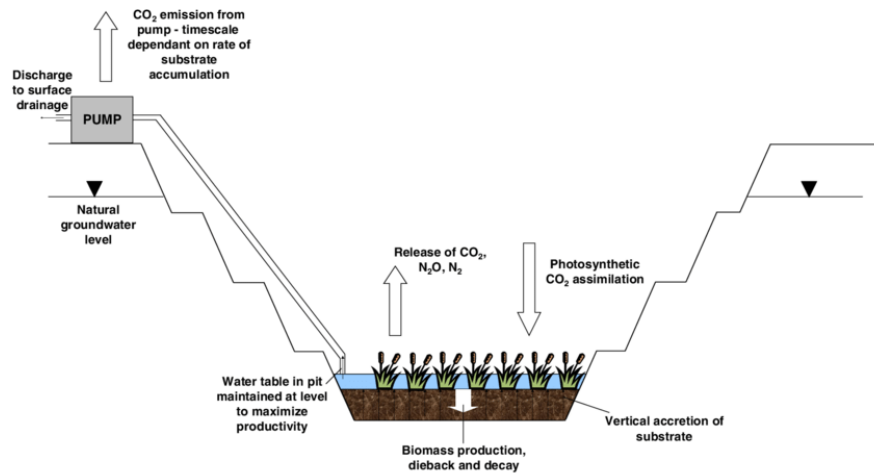
Simulasi dilakukan pada dua skenario curah hujan utama. Skenario A merepresentasikan kondisi hujan normal, di mana intensitas curah hujan harian ditetapkan setara dengan nilai rata-rata bulanan regional yang umum digunakan dalam analisis hidrologi tambang tropis (Fitriati et al., 2025; Sukmara et al., 2022). Skenario B merepresentasikan kondisi hujan ekstrem, dengan akumulasi curah hujan sebesar 400–600 mm yang terjadi secara berturut-turut selama tujuh hari, dianalogikan dengan kejadian banjir regional Januari 2021 di Kalimantan Selatan sebagaimana dilaporkan dalam studi klimatologi dan hidrologi regional (Fitriati et al., 2025). Parameter hidraulik tanah ditetapkan secara representatif berdasarkan literatur material tropis, dengan konduktivitas hidraulik jenuh (K_s) sebesar 1×10^{-6} m/s untuk lapisan overburden, 1×10^{-4} m/s untuk lapisan aluvial, dan 1×10^{-7} m/s untuk lapisan laterit, yang mencerminkan perbedaan sifat permeabilitas khas tanah dan batuan lapuk di lingkungan tropis (Rahardjo et al., 2011; Rahmad et al., 2019; Xing et al., 2018). Parameter fungsi retensi air tanah van Genuchten ditetapkan dalam rentang $\alpha = 0,01\text{--}0,03 \text{ cm}^{-1}$ dan $n = 1,4\text{--}1,9$, sesuai dengan karakteristik tekstur tanah tropis, material aluvial, dan laterit sebagaimana dilaporkan dalam studi eksperimental dan pemodelan terdahulu (Giudici, 2023; Jia et al., 2024; X. Wang et al., 2025).

Pada skenario hujan ekstrem, simulasi numerik satu dimensi (1-D) dan dua dimensi (2-D) menunjukkan bahwa respon infiltrasi bersifat sangat transien dan terutama dikontrol oleh sifat hidraulik lapisan overburden dan material aluvial, sesuai dengan teori aliran tak jenuh berbasis Persamaan Richards dan penerapannya pada media berpori heterogen (Farthing & Ogden, 2017; Zhang et al., 2022). Front basah mencapai kedalaman sekitar 3–6 m dalam waktu 48–72 jam ketika lapisan atas memiliki konduktivitas hidraulik relatif tinggi, sedangkan pada kondisi lapisan laterit berkonduktivitas rendah, pergerakan front basah melambat namun diikuti oleh akumulasi tekanan air pori lokal akibat penahanan aliran vertikal, suatu mekanisme yang umum dilaporkan pada tanah tropis bertekstur lateritik dan batuan lapuk (Cho, 2016; Rahardjo et al., 2011; Rahmad et al., 2019).

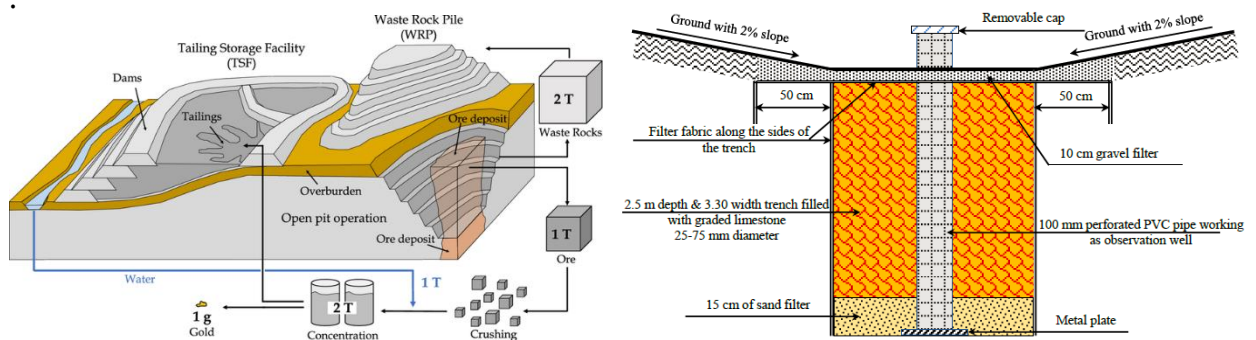
Dinamika ini menghasilkan peningkatan inflow ke pit yang signifikan, dengan kenaikan tajam terjadi antara hari ke-2 hingga hari ke-5 setelah awal kejadian hujan. Puncak inflow yang diprediksi oleh model aliran tak jenuh tercatat sekitar 1,8–3,5 kali lebih besar dibandingkan estimasi model berbasis aliran jenuh yang mengabaikan proses aliran tak jenuh transien, yang diketahui cenderung meremehkan respon hidrologi awal pascahujan (Kmec et al., 2021; Szczepiński, 2019). Secara keseluruhan, hasil ini menegaskan bahwa zona tak jenuh berperan sebagai pengontrol utama respon awal sistem hidrologi tambang terhadap hujan episodik, khususnya dalam menentukan waktu tunda peningkatan inflow dan tekanan air pori yang berimplikasi langsung terhadap pengelolaan air dan kestabilan lereng tambang terbuka di lingkungan tropis bercurah hujan tinggi seperti Kalimantan Selatan (Y. Wang et al., 2022; Zhang et al., 2022)

Distribusi tekanan air pori hasil simulasi 2-D dalam bentuk kontur tekanan kapiler (ψ) pada beberapa waktu simulasi. Pada kondisi awal (pra-hujan), distribusi tekanan menunjukkan gradien vertikal yang stabil. Namun, setelah kejadian hujan ekstrem beruntun, terjadi peningkatan tekanan air pori yang signifikan pada zona transisi antara lapisan aluvial dan laterit. Peningkatan tekanan ini terjadi secara progresif dan mencapai nilai maksimum pada hari ke-2 hingga ke-5, bertepatan dengan waktu kedatangan *front basah* ke kedalaman kritis. Secara mekanistik, kondisi ini berpotensi menurunkan tegangan efektif dan faktor keamanan lereng, terutama pada lereng pit dengan geometri curam dan sistem drainase terbatas.

Mekanisme keruntuhan lereng dalam kondisi curah hujan, baik dalam keadaan jenuh maupun tidak jenuh, sebagian besar disebabkan oleh progres pergerakan *wetting front* (garis basah) akibat air, yang memicu kenaikan tekanan air pori sehingga mengakibatkan penurunan kekuatan geser (Pan, Wu, Zhao, & He, 2020; Yang, Uzuoka, Thuo, Lin, & Nakai, 2017). Gambar 3 menyajikan Model Konseptual Interaksi Hidrologi-Mekanik pada Lereng Tambang Terbuka Tropis di Kalimantan Selatan, yang mengilustrasikan proses transien infiltrasi air hujan melalui zona tak jenuh. Model ini memperlihatkan bagaimana pergerakan *wetting front* secara vertikal menurunkan tegangan hisap tanah (*matrix suction*) dan meningkatkan tekanan air pori, yang pada akhirnya memicu terbentuknya bidang gelincir (*slip surface*) pada lereng tambang. Visualisasi skema konseptual domain hidrogeologi tambang terbuka yang menunjukkan kondisi batas permukaan, stratigrafi berlapis (overburden, alluvial, laterit/batuan lapuk), serta interaksi aliran tak jenuh–jenuh terhadap respon inflow pit akibat curah hujan transien, dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 3. Model Konseptual Interaksi Hidrologi-Mekanik pada Lereng Tambang Terbuka



Gambar 4. Skema Konseptual Domain Hidrogeologi Tambang Terbuka (Kiri) dan Aliran Tak Jenuh-Jenuh Akibat Curah Hujan Transien (Kanan)

Gambar 4 menjelaskan bahwa batas atas domain (A) merepresentasikan permukaan tanah dan sistem drainase permukaan, di mana curah hujan transien $P(t)$ diterapkan sebagai fluks masuk dan evapotranspirasi $E(t)$ diperhitungkan. Zona overburden (B; 0–5 m) terdiri atas material lempung-berpasir hingga humus dengan kapasitas simpan air tinggi, dicirikan oleh parameter van Genuchten dengan nilai α relatif kecil, sehingga berperan sebagai penahan awal pergerakan front basah. Lapisan alluvial atau pasir (C; 5–20 m) memiliki konduktivitas hidraulik lebih tinggi, memungkinkan penetrasi front basah yang cepat dan memberikan kontribusi signifikan terhadap inflow ke pit apabila terkoneksi secara hidraulik. Lapisan laterit atau batuan lapuk (D; 20–50 m) menunjukkan ketahanan perkolasi menengah hingga rendah dengan karakter retensi yang bergantung pada tingkat pelapukan, dan merupakan satuan litologi yang umum dijumpai di Kalimantan Selatan.

Zona jenuh atau batuan dasar (E) diasumsikan berada pada kondisi muka air regional; apabila muka air relatif dangkal, penetrasi front basah dapat secara langsung meningkatkan aliran menuju domain jenuh dan memperbesar inflow ke pit. Sistem dewatering dan drainase (F), berupa sumur dewatering atau drain

horizontal, dimodelkan sebagai kondisi sink ($S < 0$) untuk mengevaluasi skenario mitigasi, dengan mempertimbangkan bahwa drain horizontal efektif menurunkan tekanan air pori namun dapat memodifikasi pola aliran sehingga memerlukan desain yang terkalibrasi. Secara operasional, selama episode hujan ekstrem, permukaan tanah cepat mengalami kejenuhan dan membentuk front basah yang bergerak secara vertikal maupun lateral sesuai dengan heterogenitas lapisan; keberadaan lapisan permeabel di atas lapisan kurang permeabel dapat memicu pembentukan air menggantung (perched water), peningkatan tekanan air pori lokal, dan rembesan mendadak ke pit. Model 2-D digunakan untuk menangkap distribusi tekanan pori, pola aliran, serta mengidentifikasi zona kritis yang berpotensi mempengaruhi kestabilan lereng.

Analisis sensitivitas parameter menunjukkan bahwa respons inflow pit sangat dipengaruhi oleh karakteristik hidraulik zona tak jenuh. Peningkatan parameter van Genuchten α , yang merepresentasikan kurva retensi air tanah yang lebih curam, mempercepat pergerakan front basah dan menghasilkan variasi waktu terjadinya puncak inflow sebesar ± 30 – 60% dalam rentang nilai parameter yang umum dilaporkan untuk tanah tropis dan material pelapukan (Farthing & Ogden, 2017; Zhang et al., 2022). Variasi parameter n memodifikasi bentuk kurva retensi dan distribusi kelembaban residual, dengan pengaruh terhadap besaran inflow yang relatif lebih moderat, yakni sekitar ± 10 – 25% , sejalan dengan perannya dalam mengontrol transisi kelembaban pada zona tak jenuh (Cho, 2016; Younes et al., 2022).

Sebaliknya, konduktivitas hidraulik jenuh (K_s) menunjukkan pengaruh paling signifikan terhadap respons sistem; peningkatan K_s sebesar satu orde besaran pada lapisan berpermeabilitas tinggi mampu meningkatkan inflow puncak ke pit hingga 2–4 kali lipat, sebagaimana juga dilaporkan dalam studi pemodelan aliran tak jenuh–jenuh pada lingkungan tambang dan media berlapis (Kmec et al., 2021; Sales et al., 2025). Temuan ini menegaskan bahwa akurasi estimasi fungsi konduktivitas hidraulik tak jenuh $K(\theta)$, khususnya pada kisaran kelembaban menengah yang mengontrol transisi aliran tak jenuh–jenuh, merupakan faktor kunci dalam pemodelan inflow dan penilaian risiko hidrologi pada tambang terbuka di lingkungan tropis (Usman et al., 2025; X. Wang et al., 2025).

Tingginya sensitivitas inflow pit terhadap parameter hidraulik zona tak jenuh sebagaimana ditunjukkan oleh hasil simulasi menegaskan pentingnya pemilihan pendekatan pemodelan yang tepat. Untuk memperjelas implikasi praktis dari temuan ini, Tabel 1 menyajikan perbandingan berbagai pendekatan pemodelan aliran air yang umum digunakan dalam aplikasi tambang terbuka, dengan menyoroti kemampuan masing-masing metode dalam merepresentasikan respon transien, kebutuhan parameter, kompleksitas komputasi, serta relevansinya terhadap perencanaan dewatering dan pengelolaan kestabilan lereng.

Tabel 1. Perbandingan Pendekatan Pemodelan Aliran Air untuk Aplikasi Tambang Terbuka

Kriteria	Model Tak Jenuh (Richards; HYDRUS / FEM)	Model Jenuh (MODFLOW / steady-state)	SEEP/W (FEM tak jenuh-jenuh)
Representasi front basah transien	Ya (eksplisit)	Tidak (umumnya diabaikan)	Ya (melalui coupling)
Akurasi respon awal (jam-hari)	Tinggi	Cenderung diremehkan	Tinggi
Kebutuhan parameter hidraulik	Tinggi (SWRC lengkap, $(K(\theta))$)	Sedang ((K_s) , porositas)	Tinggi
Kompleksitas komputasi	Tinggi	Rendah-sedang	Tinggi
Kesesuaian untuk desain dewatering	Sangat baik untuk kondisi transien	Terbatas pada kondisi jangka panjang	Sangat baik, terintegrasi geoteknik
Representasi batuan rekahan	Terbatas (perlu DFN/dual-continuum)	Terbatas	Terbatas (perlu modifikasi)

Kondisi hidroklimat dan karakteristik tanah di Kalimantan Selatan menunjukkan perbedaan mendasar dibandingkan wilayah tambang di daerah kering atau semi-kering yang sering dijadikan referensi dalam studi hidrologi tambang. Frekuensi serta intensitas hujan ekstrem yang relatif lebih tinggi menyebabkan proses infiltrasi, pembentukan front basah, dan peningkatan tekanan air pori berlangsung lebih cepat dan bersifat sangat transien, terutama pada fase awal kejadian hujan (Fitriati et al., 2025; Sukmara et al., 2022). Data pengamatan curah hujan dari BMKG dan Stasiun Klimatologi (Staklim) merekam kejadian hujan lebat yang berdampak langsung terhadap kinerja sistem drainase pit dan dewatering, sehingga pendekatan pemodelan aliran tak jenuh menjadi lebih relevan dan krusial dibandingkan model aliran jenuh konvensional yang cenderung meremehkan respons awal sistem hidrologi tambang (Szczepliński, 2019; Zhang et al., 2022).

Dari sisi material, dominasi tanah laterit dan endapan aluvial pada banyak lokasi tambang di Kalimantan Selatan menghasilkan distribusi konduktivitas hidraulik yang sangat heterogen. Lapisan aluvial umumnya dicirikan oleh nilai konduktivitas hidraulik jenuh (K_s) yang relatif tinggi, sehingga memfasilitasi pergerakan air dan rembesan secara cepat, khususnya selama kejadian hujan intensif. Sebaliknya, lapisan laterit cenderung memiliki konduktivitas hidraulik lebih rendah namun kapasitas retensi air yang tinggi, sehingga berpotensi membentuk kondisi air menggantung (perched water) dan akumulasi tekanan air pori lokal pada zona transisi tak jenuh-jenuh (Rahardjo et al., 2011; Rahmad et al., 2019; Zhang et al., 2022). Studi karakterisasi tanah laterit serta penelitian hidrogeologi regional menunjukkan adanya variasi sifat hidraulik yang signifikan akibat perbedaan tingkat pelapukan dan tekstur material, yang menegaskan pentingnya pengambilan sampel serta pengujian hidraulik lapangan secara lokal

untuk mengurangi ketidakpastian dalam pemodelan inflow dan analisis risiko hidrologi tambang (Jia et al., 2024; Xing et al., 2018).

Secara keseluruhan, hasil analisis sensitivitas menegaskan bahwa respon hidrologi awal tambang terbuka di Kalimantan Selatan sangat dikontrol oleh parameter hidraulik zona tak jenuh, khususnya parameter *Soil Water Retention Curve* (SWRC) dan konduktivitas hidraulik jenuh. Variasi parameter van Genuchten α dan n terbukti secara signifikan mempengaruhi waktu kedatangan front basah dan besaran inflow, dengan pengaruh paling kuat terjadi pada rentang kelembaban menengah yang mengendalikan fase transisi aliran tak jenuh–jenuh (Farthing & Ogden, 2017; Younes et al., 2022; Zhang et al., 2022). Di sisi lain, konduktivitas hidraulik jenuh (K_s) pada lapisan permeabel, terutama material aluvial, muncul sebagai faktor dominan yang menentukan besaran inflow puncak, sehingga berperan sebagai jalur utama penghubung antara zona tak jenuh dan pit tambang (Kmec et al., 2021; Rahardjo et al., 2011; Rahmad et al., 2019).

Temuan ini menjelaskan mengapa peningkatan inflow dan tekanan air pori sering terjadi segera setelah hujan ekstrem, bahkan ketika muka air tanah regional belum menunjukkan respons yang signifikan, suatu fenomena yang juga dilaporkan pada studi tambang tropis dan sistem lereng beriklim basah (Szczepiński, 2019; Vianney et al., 2025). Dibandingkan dengan pendekatan model jenuh konvensional, pemodelan aliran tak jenuh transien mampu merepresentasikan mekanisme fisik ini secara lebih realistis, sehingga menghasilkan estimasi inflow dan risiko kestabilan lereng yang lebih konservatif (Bronstert et al., 2023; Gong et al., 2023). Oleh karena itu, penelitian ini menegaskan urgensi integrasi pemodelan aliran tak jenuh–jenuh dengan pengukuran lapangan SWRC dan konduktivitas hidraulik, serta pemantauan piezometrik berkelanjutan, sebagai dasar yang lebih andal untuk perencanaan dewatering dan mitigasi risiko hidrologi pada tambang terbuka di lingkungan tropis bercurah hujan tinggi.

KESIMPULAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa pemodelan aliran tak jenuh transien berbasis Persamaan Richards merupakan pendekatan yang esensial untuk merepresentasikan dinamika infiltrasi, pergerakan front basah, dan respon inflow awal pada tambang terbuka di Kalimantan Selatan yang bercurah hujan tinggi. Hasil simulasi menegaskan bahwa penggunaan model jenuh semata cenderung meremehkan inflow dan peningkatan tekanan air pori pada fase awal pascahujan, sehingga berpotensi menghasilkan estimasi yang tidak konservatif terhadap risiko kestabilan lereng. Analisis sensitivitas mengindikasikan bahwa parameter *Soil Water Retention Curve* (SWRC) dan fungsi konduktivitas hidraulik $K(\theta)$, khususnya parameter van Genuchten α dan konduktivitas hidraulik jenuh (K_s), merupakan sumber utama ketidakpastian model, dengan pengaruh paling signifikan terjadi pada rentang kelembaban menengah yang mengontrol transisi aliran tak jenuh–jenuh. Oleh karena itu, pengukuran lapangan yang terfokus pada karakterisasi SWRC dan konduktivitas hidraulik pada material aluvial dan laterit menjadi kebutuhan kritis untuk meningkatkan keandalan prediksi. Dari sudut pandang rekayasa, penelitian ini merekomendasikan penerapan pendekatan terpadu berupa kombinasi pemodelan aliran tak jenuh–jenuh, pemantauan piezometrik

berkelanjutan, serta desain sistem drainase dan dewatering yang terintegrasi sebagai strategi utama mitigasi risiko inflow dan ketidakstabilan lereng pada tambang terbuka di lingkungan tropis seperti Kalimantan Selatan.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmed, F. S., Bryson, L. S., & Crawford, M. M. (2021). Prediction of seasonal variation of in-situ hydrologic behavior using an analytical transient infiltration model. *Engineering Geology*, 294, 106383. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2021.106383>
- Bronstert, A., Niehoff, D., & Schiffler, G. R. (2023). Modelling Infiltration and Infiltration Excess: The Importance of Fast and Local Processes. *Hydrological Processes*, 37(4), e14875. <https://doi.org/10.1002/hyp.14875>
- Chen, Y., Zheng, H., Huang, X., & Liu, S. (2024). Modeling Variably Saturated Flows in Porous Media using the Numerical Manifold Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 169, 106016. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.106016>
- Cho, S. E. (2016). Stability Analysis of Unsaturated Soil Slopes Considering Water-air Flow Caused by Rainfall Infiltration. *Engineering Geology*, 211, 184–197. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2016.07.008>
- Clément, J.-B., Sous, D., Bouchette, F., Golay, F., & Ersoy, M. (2023). A Richards' Equation-based Model for Wave-resolving Simulation of Variably-saturated Beach Groundwater Flow Dynamics. *Journal of Hydrology*, 619, 129344. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2023.129344>
- Farthing, M. W., & Ogden, F. L. (2017). Numerical Solution of Richards' Equation: A Review of Advances and Challenges. *Soil Science Society of America Journal*, 81(6), 1257–1269. <https://doi.org/10.2136/sssaj2017.02.0058>
- Fitriati, U., Rusmayadi, G., Hatta, G. M., & Anggraini, D. (2025). Extreme Climate Change, Rainfall and Temperature in South Kalimantan Province, Indonesia. *Journal of Lifestyle and SDGs Review*, 5(4), 06136. <https://doi.org/10.47172/2965-730X.SDGsReview.v5.n04.pe06136>
- Giudici, M. (2023). Modeling Water Flow in Variably Saturated Porous Soils and Alluvial Sediments. *Sustainability*. <https://doi.org/10.3390/su152215723>
- Gong, C., Cook, P. G., Therrien, R., Wang, W., & Brunner, P. (2023). On Groundwater Recharge in Variably Saturated Subsurface Flow Models. *Water Resources Research*, 59(9), e2023WR034920. <https://doi.org/10.1029/2023WR034920>
- Hassane Maina, F., & Ackerer, P. (2017). Ross scheme, Newton--Raphson iterative methods and time-stepping strategies for solving the mixed form of Richards' equation. *Hydrology and Earth System Sciences*, 21(6), 2667–2683. <https://doi.org/10.5194/hess-21-2667-2017>
- Jia, L., Wang, J., Cai, X., Fang, L., Ma, Y., & Wang, Z. (2024). Study on morphology optimization of open-pit mine slope based on section and spatial morphology effect. *Scientific Reports*, 14(1), 2603. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-53227-5>

- Kmec, J., Fürst, T., Vodák, R., & Šír, M. (2021). A Two Dimensional Semi-continuum Model to Explain Wetting Front Instability in Porous Media. *Scientific Reports*, 11(1), 3223. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-82317-x>
- Pan, Y., Wu, G., Zhao, Z., & He, L. (2020). Analysis of Rock Slope Stability under Rainfall Conditions Considering the Water-Induced Weakening of Rock. *Computers and Geotechnics*, 128, 103806. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2020.103806>
- Rahardjo, H., Santoso, V. A., Leong, E. C., Ng, Y. S., & Hua, C. J. (2011). Numerical Analyses and Monitoring Performance of Residual Soil Slopes. *Soils and Foundations*, 51(3), 471–482. <https://doi.org/10.3208/sandf.51.471>
- Rahmad, B., Raharjo, S., & Ediyanto. (2019). *Pengantar Hidrogeologi dan Geologi Teknik Tambang Batubara* (1st ed.). Yogyakarta: LPPM UPN “Veteran.” Retrieved from http://eprints.upnyk.ac.id/33899/1/Pengantar_Hidro_cover%5B1%5D.pdf
- Romano, N., Brunone, B., & Santini, A. (1998). Numerical Analysis of One-dimensional Unsaturated Flow in Layered Soils. *Advances in Water Resources*, 21(4), 315–324. [https://doi.org/10.1016/S0309-1708\(96\)00059-0](https://doi.org/10.1016/S0309-1708(96)00059-0)
- Sales, D. D., Lugon Junior, J., Costa, D. D., Sales, R. S., Neves, R. J., & Silva Neto, A. J. (2025). Sensitivity Analysis of Soil Hydraulic Parameters for Improved Flow Predictions in an Atlantic Forest Watershed Using the MOHID-Land Platform. *Eng.* <https://doi.org/10.3390/eng6040065>
- Stokke, J. S., Mitra, K., Storvik, E., Both, J. W., & Radu, F. A. (2023). An adaptive solution strategy for Richards’ equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 152, 155–167. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.10.020>
- Sukmara, R. B., Wahab, M. F., & Ariyaningsih. (2022). Climate Change in South Kalimantan (Borneo): Assessment for Rainfall and Temperature. *Journal of Infrastructure Planning and Engineering (JIPE)*, 1(2), 51–59. <https://doi.org/10.22225/jipe.1.2.2022.51-59>
- Szczepiński, J. (2019). The Significance of Groundwater Flow Modeling Study for Simulation of Opencast Mine Dewatering, Flooding, and the Environmental Impact. *Water*. <https://doi.org/10.3390/w11040848>
- Usman, M., Chua, L. H. C., Irvine, K. N., & Teang, L. (2025). Numerical Modelling of Vadose Zone Flow for A Shallow Groundwater Wetland using HYDRUS-1D. *Modeling Earth Systems and Environment*, 11(4), 296. <https://doi.org/10.1007/s40808-025-02472-2>
- Vektor. (2026). Vadose or Unsaturated Zone as Geological Earth Layer Division Outline Diagram. Riga, Latvia: VectorMine SIA. Retrieved from <https://vectormine.com/item/vadose-or-unsaturated-zone-as-geological-earth-layer-division-outline-diagram/>
- Vianney, J. M., Hoth, N., Moro, K., Wardani, D. N., & Drebenstedt, C. (2025). Modeling of Water Inflow Zones in a Swedish Open-Pit Mine with ModelMuse and MODFLOW. *Sustainability*. <https://doi.org/10.3390/su17062466>

- Wang, X., Huang, Z., Qin, H., & Dai, F. (2025). Sensitivity analysis of VG model parameters for infiltration in undisturbed loess under ponding conditions using the HYDRUS-1D model. *Scientific Reports*, 15(1), 25204. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-11058-y>
- Wang, Y., Li, T., Hou, X., Zhang, Y., & Li, P. (2022). Hydraulic Modeling of Water Flow in the Thick Vadose Zone Under Precipitation. *Geoenvironmental Disasters*, 9(1), 7. <https://doi.org/10.1186/s40677-022-00207-4>
- Wise, W. R., Clement, T. P., & Molz, F. J. (1994). Variably saturated modeling of transient drainage: sensitivity to soil properties. *Journal of Hydrology*, 161(1), 91–108. [https://doi.org/10.1016/0022-1694\(94\)90122-8](https://doi.org/10.1016/0022-1694(94)90122-8)
- Xing, X., Wang, H., & Ma, X. (2018). Brooks–Corey Modeling by One-Dimensional Vertical Infiltration Method. *Water*. <https://doi.org/10.3390/w10050593>
- Yang, K.-H., Uzuoka, R., Thuo, J. N., Lin, G.-L., & Nakai, Y. (2017). Coupled hydro-mechanical analysis of two unstable unsaturated slopes subject to rainfall infiltration. *Engineering Geology*, 216, 13–30. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2016.11.006>
- Younes, A., Koohbor, B., Belfort, B., Ackerer, P., Doummar, J., & Fahs, M. (2022). Modeling Variable-density Flow in Saturated-unsaturated Porous Media: An Advanced Numerical Model. *Advances in Water Resources*, 159, 104077. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2021.104077>
- Zha, Y., Yang, J., Zeng, J., Tso, C.-H. M., Zeng, W., & Shi, L. (2019). Review of Numerical Solution of Richardson–Richards Equation for Variably Saturated Flow in Soils. *WIREs Water*, 6(5), e1364. <https://doi.org/10.1002/wat2.1364>
- Zhang, Z., Li, X., Wu, Y., & Li, X. (2022). Stable expression and control parameters in the numerical simulation of unsaturated flow. *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, 16(12), 1501–1514. <https://doi.org/10.1007/s11709-022-0893-2>